Хайнц Шуман

ИССЛЕДОВАНИЕ АНАЛОГИЙ С ПОМОЩЬЮ CABRI 3D НА ПРИМЕРЕ ПАРЫ ТРЕУГОЛЬНИК–ТЕТРАЭДР

1. ВВЕДЕНИЕ

Стереометрия является падчерицей школьной геометрии; в настоящее время она содержит простейшие представления и расчеты для некоторых стандартных тел. Другие темы пространственной геометрии затрагиваются в школе крайне редко: например, взаимное расположение пространственных объектов, конгруэнтные отображения или вопросы, связанные с эвристическими рассуждениями (например, аналогия между свойствами треугольника и тетраэдра).

Причина прежде всего в том, что для изучения этих тем имеются очень ограниченные средства. Соответствующие физические модели сложны и обычно дороги; они в большинстве своем имеют ограниченную функциональность и нединамичны. Правда, есть у них и одно достоинство – они дают целостное восприятие объекта.

Нехватка подходящих средств может быть частично компенсирована использованием манипулятивной графики. В статье [5] было показано, как с помощью программы «Körpergeometrie» [2] можно конструировать пространственные объекты. Но эта программа позволяет лишь в ограниченной степени модифицировать или строить новые тела. Также Klemenz (2001) создал независимую от платформы программу GeometerPRO (http://www.geosoft.ch/geometer), которая лишь частично удовлетворяет требованиям, предъявляемым к таким программам.

Мы собираемся изучать пространственные аналоги некоторых линий и точек треугольника с помощью системы динамической геометрии Cabri 3D. Эта система позволяет:

– строить пространственные объекты «в глубине» экрана, надстраивая соответствующие плоские объекты,

– визуализировать пространственные конструкции, задавая их атрибуты и используя так называемую *Виртуальную Сферу*, в которую можно вкладывать изучаемый объект и рассматривать его со всех сторон,

– деформировать пространственные объекты так, как это мы привыкли делать с плоскими.

Мы ставим перед собой следующие цели:

– применение эвристических и индуктивных методов [4]; исследование и анализ пространственных конфигураций,

– применение и расширение знаний в геометрии (теоремы, понятия, алгоритмы),

– тренировка наблюдательности, пространственного представления и его интерпретации, умения действовать в виртуальном пространстве,

– овладение соответствующим компьютерным устройством.

В процессе работы с задачами стереометрии компьютер и система Cabri 3D об-

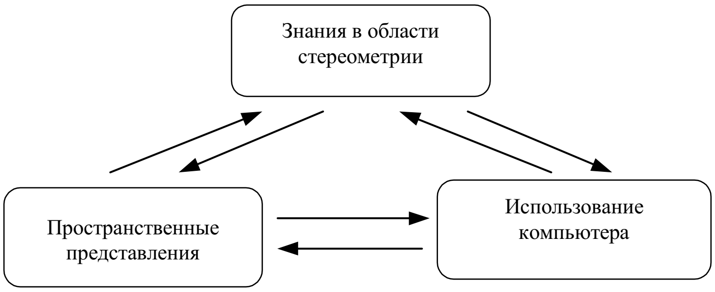

Диаграмма 1.

разуют единый инструмент, с помощью которого объединяются три взаимосвязанные области (диаграмма 1).

Стрелки в диаграмме означают поддержку соответствующей области. Очевидно, знания и навыки, приобретенные в одной области, способствуют обучению в другой области.

Далее процесс выявления аналогий разделим на три части:

– перпендикуляры к серединам сторон и их точка пересечения,

– биссектрисы и их точка пересечения,

– медианы и их точка пересечения,

– высоты и их точка пересечения.

Метод обучения основан на исследованиях, совершаемых учеником в процессе конструирования. Этот метод удалось применить только благодаря конструктивным возможностям, предоставляемым программой Cabri 3D.

При нашем преимущественно феноменологическом подходе мы не приводим аналитических или векторных доказательств и их возможной визуализации; эти вопросы отражены в прилагаемом списке литературы.

2. ИЗУЧЕНИЕ АНАЛОГИЙ С ПОМОЩЬЮ КОНСТРУИРОВАНИЯ

Описание процесса изучения аналогий с помощью конструирования организовано в виде своего рода протокола.

При поиске пространственных аналогов для точек, прямых и отрезков важно учитывать, что

– точка соответствует точке или некоторой прямой,

– прямая – прямой или некоторой плоскости,

– стороны многоугольника – граням многогранника.

При этом сохраняются такие понятия, как «соединяют», «пересекаются», «ортогональны», «параллельны».

2.1. АНАЛОГИЯ ДЛЯ ТРЕУГОЛЬНИКА

Пространственным аналогом треугольника является тетраэдр (треугольная пирамида) (рисунок 1).

2.2. АНАЛОГИЯ ДЛЯ ЦЕНТРА ОПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТИ

На грани тетраэдра отмечаем точку пересечения перпендикуляров к серединам сторон (центр описанной окружности) и восстнавливаем перпендикуляр к плоскости грани (рисунок 2).

На этом перпендикуляре отмечаем подвижную точку. Она равноудалена от вершин треугольника, и поэтому можно построить сферу с центром в этой точке и проходящую через вершины треугольника (ри-

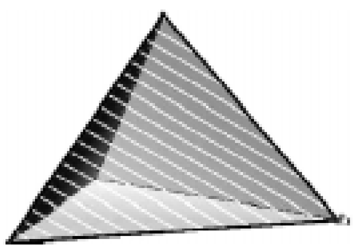

Рисунок 1.

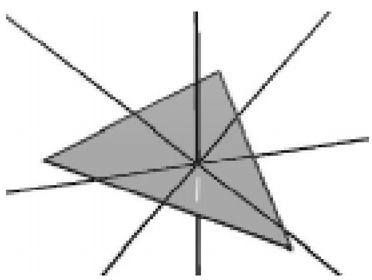

Рисунок 2.

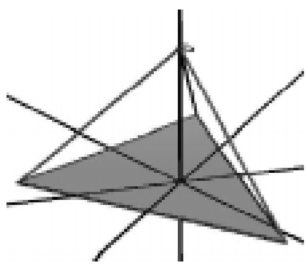

Рисунок 3.

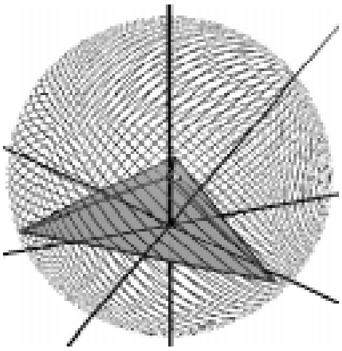

Рисунок 4.

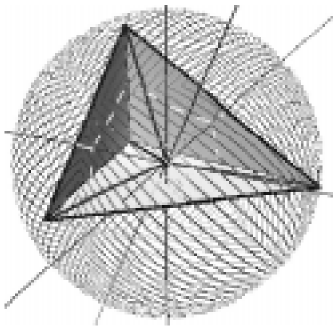

Рисунок 5.

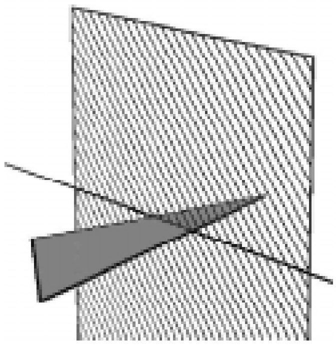

Рисунок 6.

сунок 3). Двигаясь по перпендикуляру, получаем семейство сфер (рисунок 4).

Повторяя такое построение для каждой грани, получаем, что перпендикуляры к граням пересекаются в одной точке – центре описанной сферы (рисунок 5) – аналогично центру описанной окружности треугольника. Перемещая вершины тетраэдра, можно исследовать, какой вид имеет тетраэдр, когда центр сферы находится вне тетраэдра или на его грани.

Другой вариант построения получится, если через середины ребер провести плоскости, перпендикулярные к ребрам (рисунки 6, 7, 8). Эти шесть плоскостей пересекаются в центре описанной сферы.

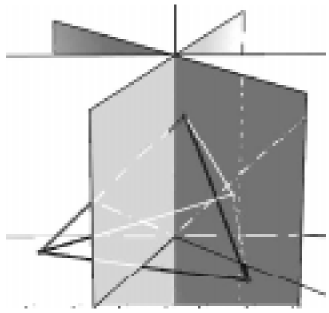

Рисунок 7.

2.3. АНАЛОГИ БИССЕКРИС

Попробуем найти в тетраэдре аналоги биссектрис треугольника. Рассмотрим один из трехгранных углов тетраэдра. Проведем три плоскости, перпендикулярные соответствующим граням этого угла и проходящие через биссектрисы его плоских углов (рисунок 9).

Эти плоскости пересекаются по одной прямой. Может ли на этой прямой находиться центр сферы, касающейся всех трех граней? К сожалению, в общем случае это не так (рисунок 10). Вместо описанных выше плоскостей, построим три плоскости, проходящие через биссект-

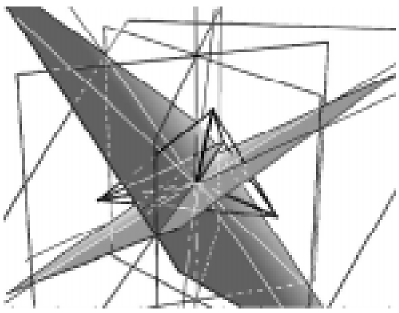

Рисунок 8.

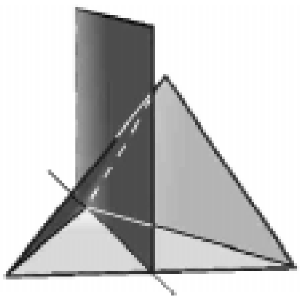

Рисунок 9.

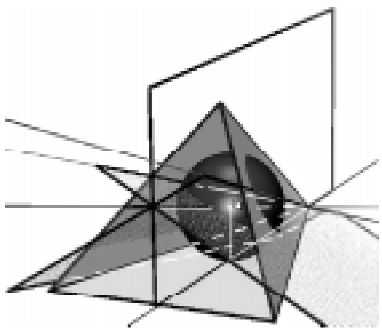

Рисунок 10.

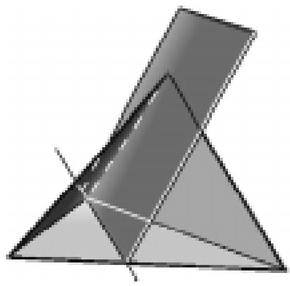

Рисунок 11.

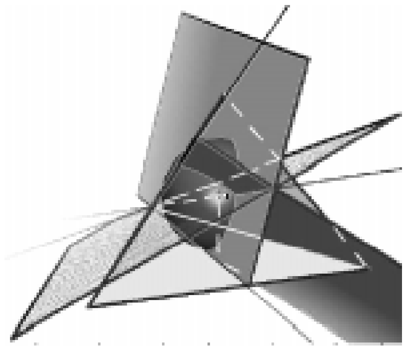

Рисунок 12.

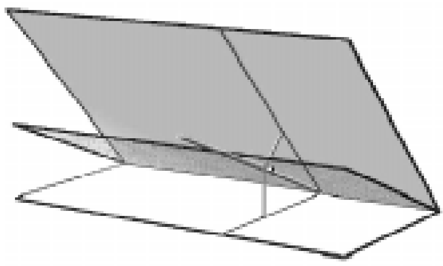

Рисунок 13.

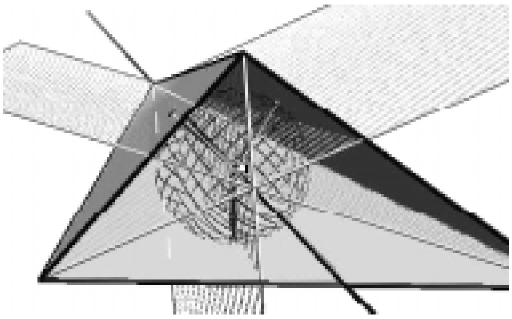

Рисунок 14.

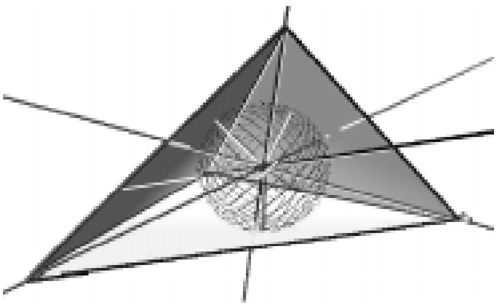

Рисунок 15.

рисы граней трехгранного угла и противоположное ребро этого угла (рисунок 11), они тоже пересекаются по одной прямой. Однако и в этом случае сфера с центром на этой прямой касается только одной из граней (рисунок 12). Нужно подыскать другие аналоги. Таким аналогом является плоскость, проходящая через одно из ребер трехгранного угла и биссектрису соответствующего линейного угла (рисунок 13). Эту плоскость можно назвать биссектрисой двугранного угла.

Три таких биссектрисы при одной вершине тетраэдра пересекаются по одной прямой. На этой прямой находится центр вписанной в тетраэдр сферы (рисунок 14). Эту прямую можно назвать биссектрисой трехгранного угла (лучше: равноудаленной от граней). Четыре биссектрисы пересекаются в одной точке – центре вписанной окружности (рисунок 15).

По аналогии с разбиением треугольника на три треугольника лучами, выходящими из центра вписанной окружности, тетраэдр можно разбить, на четыре тетраэдра с общей вершиной в центре вписанной окружности, ос-

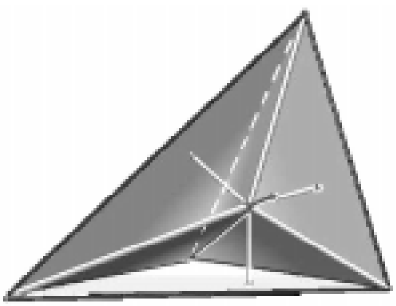

Рисунок 16.

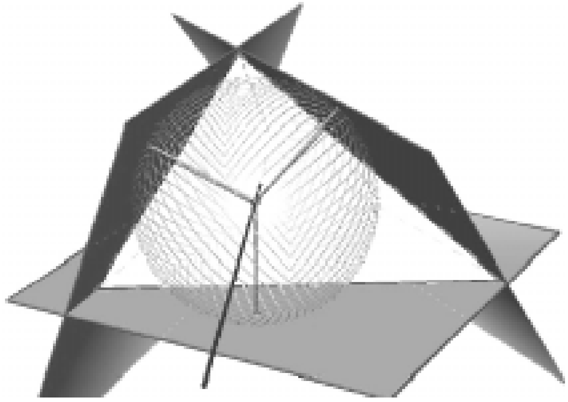

Рисунок 17.

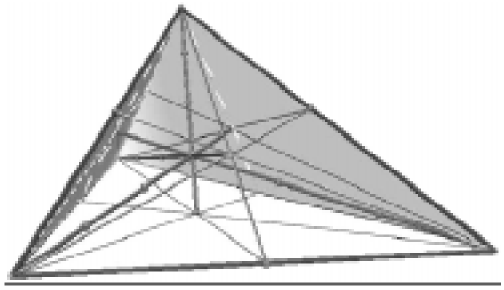

Рисунок 18.

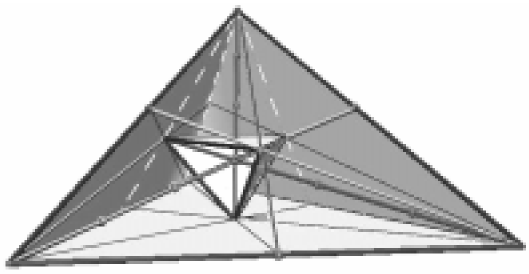

Рисунок 19.

нования которых совпадают с гранями тетраэдра (рисунок 16). Из этого разбиения непосредственно следует, что объемы этих тетраэдров равны одной четверти от объема исходного тетраэдра, если это правильный тетраэдр.

2.4. АНАЛОГИ МЕДИАН

В треугольнике медианы соединяют середины, то есть центры тяжести, сторон треугольника с противоположными вершинами и пересекаются в одной точке. Аналогично этому в тетраэдре линии, соединяющие центры тяжести граней с его противоположными вершинами (рисунок 18), также пересекаются в одной точке – центре тяжести тетраэдра. Центр тяжести треугольника делит медианы в отношении 2:1. Имеется ли аналогичное отношение для тетраэдра? С помощью зеркальной симметрии можно установить, это отношение равно 3:1.

Также и для треугольника с вершинами в серединах сторон исходного треугольника, имеется аналог в тетраэдре. Этот треугольник получается из исходного с помощью преобразования подобия с коэффициентом 1/2. Тетраэдр с вершинами в центрах тяжести граней исходного тетраэдра (рисунок 19) получается из исходного с помощью преобразования подобия с коэффициентом 1/3.

Линии другого типа – прямые, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра. Они пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам. Эта точка совпадает с центром тяжести тетраэдра (рисунок 20).

Через середины сторон треугольника можно провести окружность, центр *F* которой лежит на прямой, соединяющей центр описанной окружности *M* и центр тяжести *S* (рисунок 21). Эта окружность известна как окружность Фойербаха, поэтому ее центр и обозначен через *F*. Точка *S* лежит между *F* и *M*; справедливо соотношение $SF : SM = 1 : 2$.

Аналогичным образом через центры тяжести граней проводится сфера и устанавливается, что ее центр *F* находится на прямой, соединяющей центр описанной сферы *M* и центр тяжести *S* тетраэдра (рисунок 22), причем *S* делит отрезок *FM* в таком же отношении, как и в треугольнике. Однако сфера Фойербаха не во всем ана-

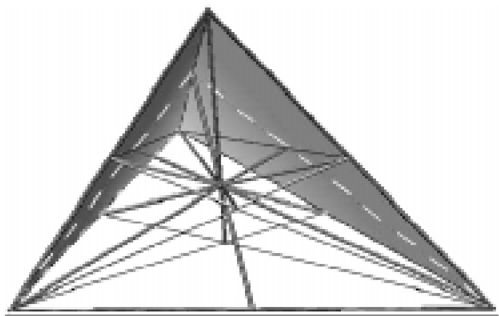

Рисунок 20.

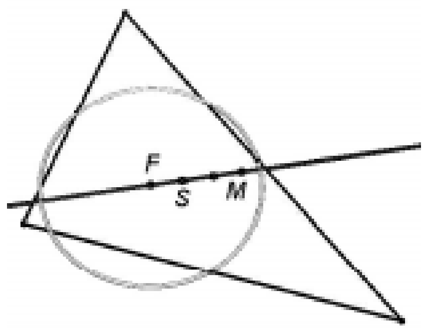

Рисунок 21.

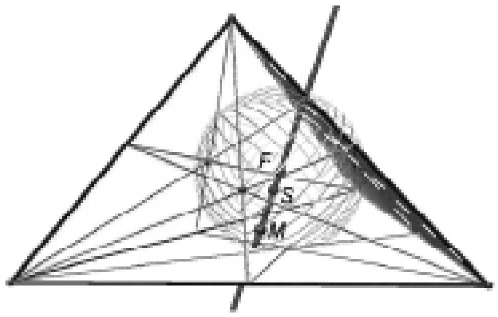

Рисунок 22.

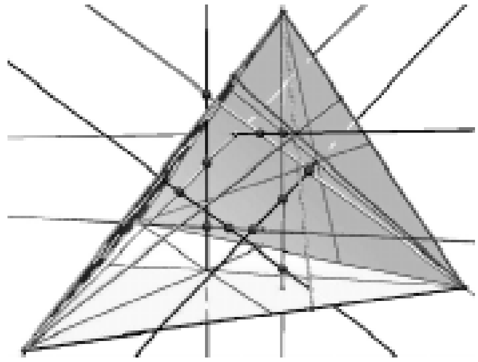

Рисунок 23.

логична окружности Фойербаха: она не пересекает ни вписанной ни описанной сфер.

2.5. АНАЛОГИ ВЫСОТ

Опустим перпендикуляры из вершин тетраэдра на противоположные грани и обнаружим с удивлением, что они не пересекаются в одной точке. Попытка восставить перпендикуляры к граням из точек пересечения их высот также не дает результата.

Что делать? Может, мы сможем что-то обнаружить, связав оба типа перпендикуляров. Они параллельны по построению. Из рисунка 23 видно, что каждая из высот тетраэдра пересекается с теми тремя перпендикулярами второго типа, которые выходят из граней, соединяющихся в той же вершине, из которой выходит высота. Верно и аналогичное утверждение для каждого перпендикуляра второго типа по отношению к трем высотам тетраэдра, выходящим из вершин соответствующего треугольника. В качестве «золотой середины» выбираем для каждой пары параллельных перпендикуляров прямую, лежащую в той же плоскости и равноудаленную от них; четыре таких прямых пересекаются в одной точке (рисунок 24). Эту точку обозначим через H и примем ее в качестве заменителя несуществующей точки пересечения высот.

Кроме этого, мы обнаруживаем, что H лежит на одной прямой с точками M, S, F, H именно, в такой последовательности (рисунок 25), причем S – середина MH и F – середина SH. Поэтому прямая может называться прямой Эйлера тетраэдра по аналогии с прямой Эйлера треугольника.

Имеется ли в произвольном тетраэдре еще что-либо аналогичное высотам? Если провести плоскости через точку H перпендикулярно ребрам тетраэдра, то оказывается, что они проходят через середины противоположных ребер. Точку H можно определить и как точку пересечения плоскостей, проходящих через середины ребер перпендикулярно противоположным ребрам. Такое построение принадлежит Гаспару

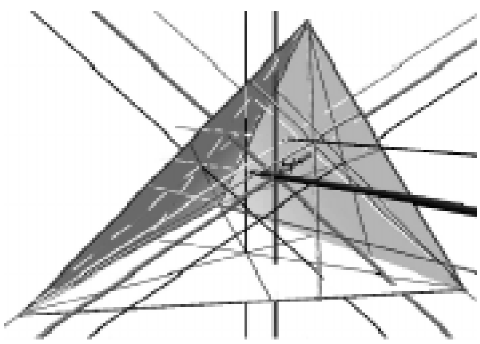

Рисунок 24.

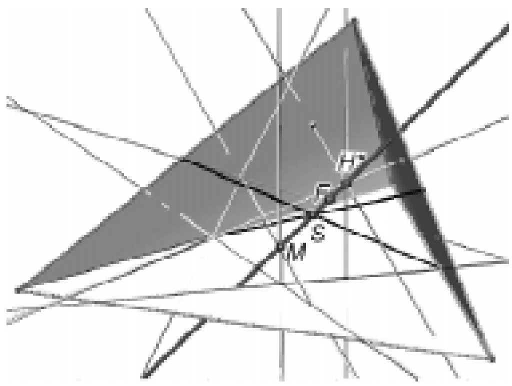

Рисунок 25.

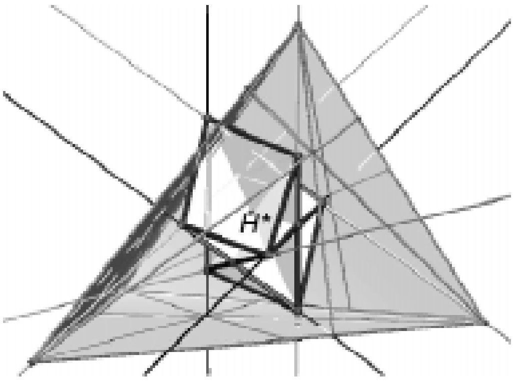

Рисунок 26.

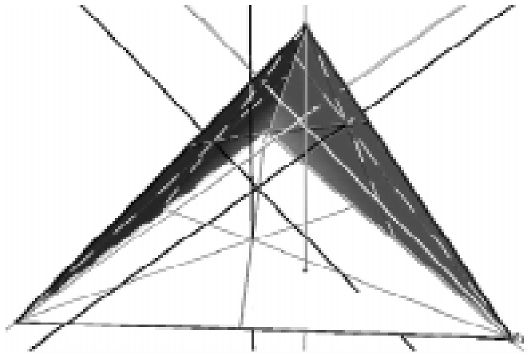

Рисунок 27.

Монжу (1746–1818), создателю начертательной геометрии. Поэтому точка *H* называется также точкой Монжа.

Если вместо прямых, параллельных высотам провести плоскости через высоты тетраэдра и точки пересечения высот соответствующих граней, то и они пересекаются в *H*.

Вернемся к рисунку 23. Изображенные там четыре пары точек, выбранные из двух троек точек, лежащих на параллельных прямых, образуют вместе с соответствующими внешними точками четыре параллелограмма (рисунок 26). Эти параллелограммы пересекаются в Н и поэтому их можно назвать параллелограммами Монжа.

Исследуем теперь, какие тетраэдры обладают «правильными» высотами, то есть пересекающимися в одной точке. С этой целью будем перемещать вершины тетраэдра (рисунок 27).

Будем поворачивать тетраэдр, пока «заднее» ребро не станет перпендикулярным плоскости экрана; тогда противоположное ребро будет параллельно этой плоскости и перпендикулярно заднему ребру (рисунок 28).

Итак, можно сформулировать следующее утверждение: Если высоты тетраэдра пересекаются в одной точке, то противоположные ребра перпендикулярны друг другу.

Построение такого тетраэдра весьма просто. В произвольном треугольнике проводим плоскости, проходящие через высоты и перпендикулярные плоскости треугольника (рисунок 29). Эти плоскости пересекаются по одной прямой. Соединяя любую точку на этой прямой с вершинами треугольника, получаем требуемый тетраэдр (рисунок 30).

Верно также и утверждение, обратное к только что рассмотренному.

Продолжая исследование, можно было бы, например, выяснить, имеет ли для та-

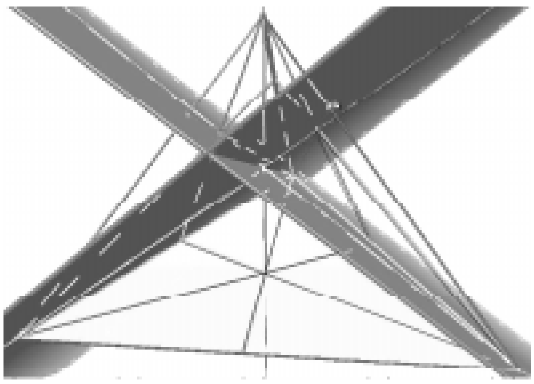

Рисунок 28.

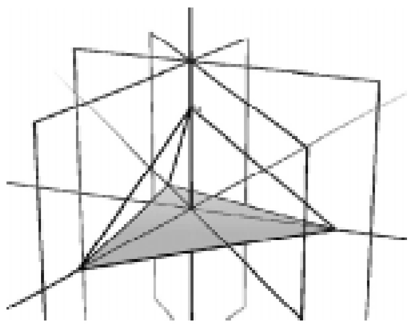

Рисунок 29.

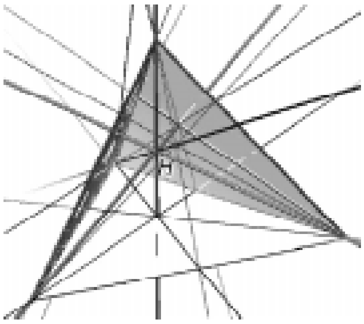

Рисунок 30.

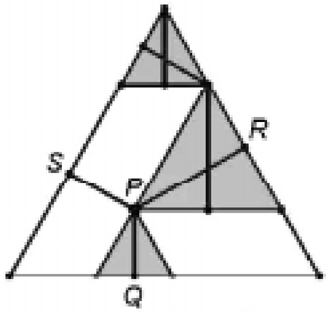

Рисунок 31.

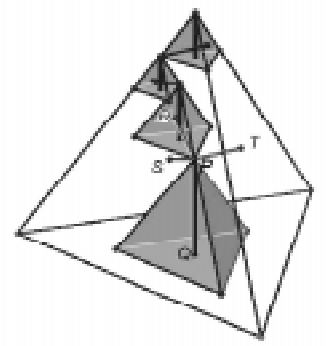

Рисунок 32.

ких тетраэдров сфера Фойербаха все свойства, аналогичные свойствам окружности Фойербаха.

3. ПЕРСПЕКТИВЫ

Ниже приводятся некоторые темы, связанные с исследованием аналогий. Они могут служить основой тем семинаров для способных учеников. (При этом возможностей, предоставляемых версией 1.0 программы Cabri 3D будет недостаточно.)

• *Аналоги других линий и точек треугольника:* Какие из многочисленных линий (включая окружности) точек треугольника [6] имеют аналоги в произвольном или специальном тетраэдре?

• *Формы тетраэдра:* Подобно классификации треугольников по их сторонам, углам и симметрии, создать аналогичную классификацию для тетраэдров.

• *Построение тетраэдров:* Как строить тетраэдры, используя аналогию с построением треугольников? Каковы признаки подобия тетраэдров, аналогичные таковым для треугольников?

Конечно, этим не исчерпываются все возможности темы «треугольник-тетраэдр». Например, укажем на утверждение о постоянстве суммы расстояний от внутренней точки правильного треугольника до его сторон (рисунок 31). Каков его аналог для тетраэдра (рисунок 32)?

Замечание. Благодаря системе Cabri 3D мы можем в настоящее время эффективней проводить изучение аналогий плоскостью и пространством и впервые применять экспериментальный подход.

Литература

1. *Bainville, E., Laborde, J.-M.* (2004): Cabri 3D 1.0. (Software). Grenoble: Cabrilog.
2. *Bauer, H. et al.* (1999): Kцrpergeometrie. (Software). Berlin: Cornelsen.
3. *Donath, E.* (1976): Die merkwьrdigen Punkte und Linien des ebenen Dreiecks. Berlin: DVW.
4. *Polya, G.* (1962): Mathematik und plausibles SchlieЯen. Band I, Induktion und Analogie in der Mathematik. Basel: Birkhдuser.
5. *Schumann, H.* (2001): Raumgeometrie – Unterricht mit Computerwerkzeugen. Berlin: Cornelsen.
6. *Schumann, H.* (2005): Dynamische Raumgeometrie. In: Beitrдge zum Mathematikunterricht.

Prof. Dr. habil. Heinz Schumann
University of Education Weingarten,
Fakultät III, Mathematik/Informatik
D-88250 Weingarten, Germany
schumann@ph-weingarten.de
http://www.mathe-schumann.de